Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант 190

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 1 .

На день рождения полагается дарить букет из нечетного числа цветов. Ромашки стоят 10 рублей за штуку. У Вани есть 120 рублей. Из какого наибольшего числа ромашек он может купить букет Лене на день рождения?

.Решение

120:10=12(шт). Т.к на день рождения полагается дарить букет из нечетного числа цветов ,то ромашек 11

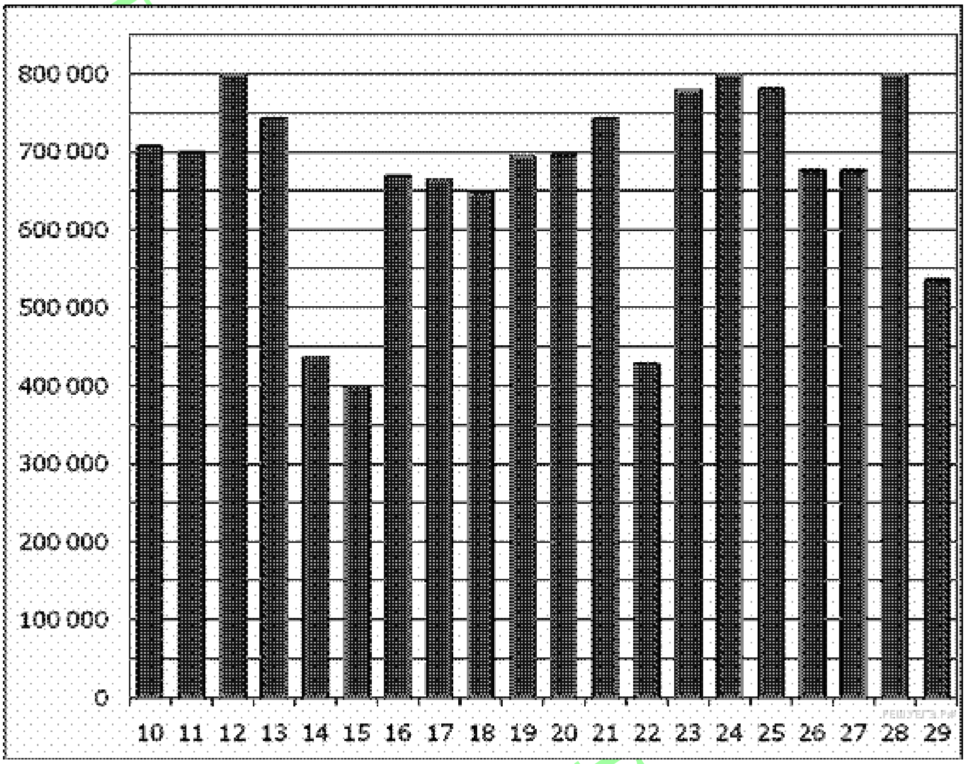
Ответ: 11.

В 2.

Кружка стоит 180 рублей. Какое наибольшее число кружек можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35% ?

Решение
180-180·0,35=117(руб)-новая цена кружки
900:117≈7,69 (шт)
Можно купить 7 кружек
Ответ: 7.

В 3. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости впервые приняло наибольшее значение.



Решение.

Из графика видно, что 12 числа количество посетителей сайта РИА Новости было наибольшим за указанный период (см. рисунок).

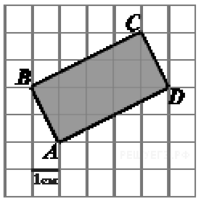
Ответ: 12.

В 4 Для остекления музейных витрин требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

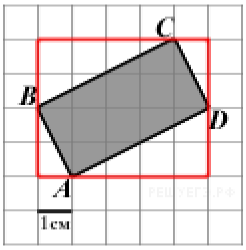
Фирма	**Цена стекла (руб. за 1 м^2)**	**Резка стекла (руб. за одно стекло)**	**Дополнительные условия**
А	300	17	
Б	320	13	
В	340	8	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно.

Решение.
Общая площадь стекла, которого нужно изготовить равна 20 . 0,25 = 5 м^2.
Стоимость заказа в фирме *А* складывается из стоимости стекла 300 . 5 = 1500 руб. и стоимости его резки и шлифовки 17 . 20 = 340 руб. Всего 1840 руб.
Стоимость заказа в фирме *Б* складывается из стоимости стекла 320 . 5 = 1600 руб. и стоимости его резки и шлифовки 13 . 20 = 260 руб. Всего 1860 руб.
Стоимость заказа в фирме *В* складывается из стоимости стекла 340 . 5 = 1700 руб. и стоимости его резки и шлифовки 8 . 20 = 160 руб. Всего 1860 руб.
Стоимость самого дешевого заказа составляет 1840 рублей.

Ответ 1840 рублей



B5. Найдите площадь прямоугольника *ABCD*, считая стороны квадратных клеток равными 1.
Решение.



Площадь прямоугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного прямоугольника. Поэтому

$$S = 5\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 10 \text{ см}^2.$$

Ответ: 10.

Примечание
Для вычисления площади фигуры можно сложить площади треугольников *BCD* и *BAD*, имеющих общую сторону *BD*, длина которой равна 5, и равные проведенные к ней высоты длины 2.
Ответ: 10

B 6. . В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.
Решение.
В чемпионате принимает участие $20-(8+7)=5$ спортсменок из Китая. Тогда вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая, равна

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

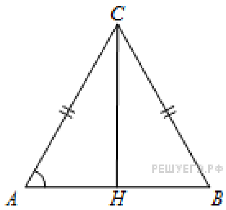
Ответ: 0,25.

B 7. Решите уравнение $\sqrt{6+5x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Решение.
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x=x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

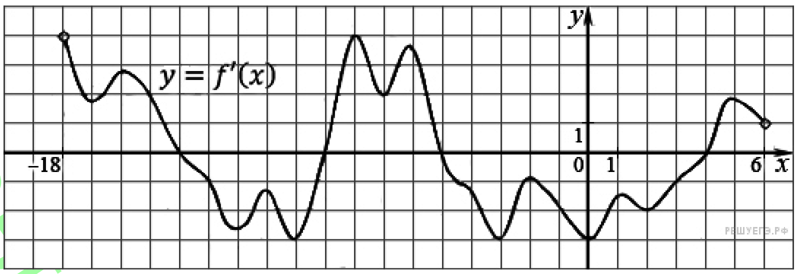


В 8. В треугольнике ABC $AC=BC=8$, $CH=4\sqrt{3}$. Найдите $\cos A$.

Решение :$\sin A=\frac{CH}{AC}$. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos A=\frac{1}{2}$

Ответ: 0,5.

В 9 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$на отрезке $[-13;1]$.

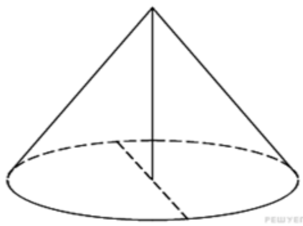


Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-13;1]$функция имеет одну точку минимума $x=-9$.

Ответ: 1.

В 10 Высота конуса равна 8, а диаметр основания – 12 .Найдите образующую конуса.



Решение:

Радиус основания:6

По теореме Пифагора $l=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Ответ: 10

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 11. Найдите значение выражения $\dfrac{18\sin 111°\cdot\cos 111°}{\sin 222°}$

Решение

По формулам двойного угла $\dfrac{18\sin 111°\cdot\cos 111°}{\sin 222°}=\dfrac{18\sin 111°\cos 111°}{2\sin 111°\cos 111°}=9$

Ответ: 9

В 12 . Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

Решение.

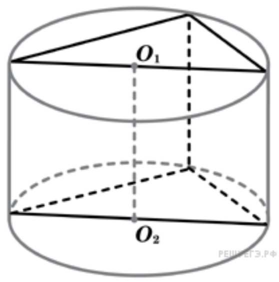
Мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если $S \le 30$ км. Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $S \le 30$ км при заданных значениях параметров v_0 и a:

$$S \le 30 \Leftrightarrow 6t^2 + 57t \le 30 \Leftrightarrow 6t^2 + 57t - 30 \le 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 19t - 10 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-19-\sqrt{361+80}}{4} \le t \le \frac{-19+\sqrt{361+80}}{4} \Leftrightarrow -10 \le t \le 0,5$$

Учитывая то, что время – неотрицательная величина, получаем $t \le 0,5$ ч, то есть $t \le 30$ мин.

Ответ: 30.

В 13 . В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\dfrac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Решение.

По теореме Пифагора длина гипотенузы треугольника в основании $\sqrt{6^2+8^2}=10$. Поскольку гипотенуза является диаметром основания описанного цилиндра, его объем

$$V = H\frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{5}{\pi}\right)\frac{100\pi}{4} = 125.$$

Ответ: 125.

B 14 . Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение.

Пусть рабочие в первый день проложили a_1метров тоннеля, во второй — a_2, …, в последний — a_{10}метров тоннеля. Длина тоннеля $S_n = 500$метров. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, $n = 10$дней. Тогда в последний день рабочие проложили

$$a_{10} = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{1000}{10} - 3 = 97$$ метров.

Ответ: 97.

B 15. Найдите точку минимума функции $y = (x+16)e^{x-16}$.

Решение.

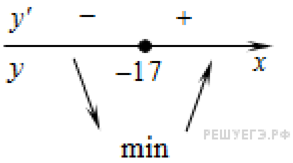
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x+16)'e^{x-16} + (x+16)(e^{x-16})' = e^{x-16} + (x+16)e^{x-16} = (x+17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+17)e^{x-16} = 0 \Leftrightarrow x = -17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -17$.

Ответ: −17.

Для записи решений и ответов на задания C1-C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C 1 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

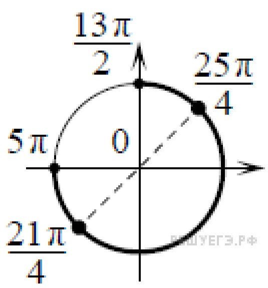
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

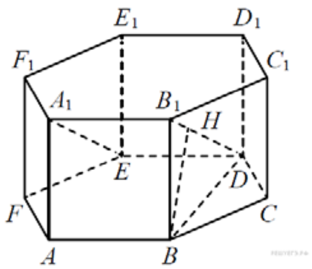
б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. *б)* $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

С 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны *1*. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.

Решение.



Прямые BB_1 и DB перпендикулярны прямой ED. Плоскость DEA_1, содержащая прямую ED, перпендикулярна плоскости BB_1D. Значит, искомое расстояние равно высоте BH прямоугольного треугольника BB_1D, в котором $BB_1 = 1$, $BD = \sqrt{3}$, $B_1D = 2$:

$$BH = \frac{BB_1 \cdot BD}{B_1D} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

С 3 Решите систему

$$\begin{cases} 5^{3x-1} - 5^{3x+1} \le -72, \\ \log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство:

$$5^{3x-1}(1-25) \le -72 \Leftrightarrow 5^{3x-1} \ge 3 \Leftrightarrow 3x - 1 \ge \log_5 3 \Leftrightarrow x \ge \frac{\log_5 3 + 1}{3}.$$

2. Решим второе неравенство. Заметим, что $3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x. При условиях $x > 0$ и $x \ne 3$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(3x^2 - 2x + 1 - 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow x(x-3)(3x-2) \ge 0.$$

При указанных условиях получаем: $0 < x \le \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. $0 < \log_5 3 < 1$, поэтому

$\frac{1}{3} < \frac{\log_5 3 + 1}{3} < \frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{\log_5 3 + 1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3 + 1}{3}; \frac{2}{3}\right]$; $(3; +\infty)$.

С 4 . В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R* касающаяся стороны *AC* в точке *D* причём *AD=R*

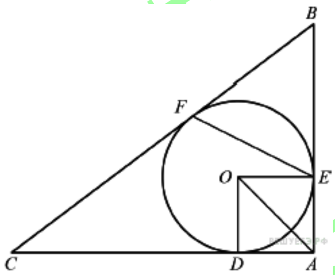
а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон *AB* и *BC* в точках *E* и *F*.Найдите площадь треугольника *BEF* если известно, что *R=2* и .*CD=10.*

Решение.

а) Пусть O— центр вписанной окружности треугольника ABC.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO— биссектриса угла BAC.Треугольник AODпрямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$.Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$.По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2, CF = CD = 10$и $BE = BF = x$.По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$.или $(10+x)^2 = 12^2 + (2+x)^2$.Из этого уравнения находим, что $x = 3$.Тогда

$$BC = 13,\ \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2}BE\cdot BF\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

С 5 Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a-3)^2 = |x+3-a| + |x+a-3|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(a-3)^2 = |3-a| + |a-3| \Leftrightarrow |a-3|\cdot(|a-3|-2) = 0,$$

откуда либо $|a - 3| = 0 \Leftrightarrow a = 3$, либо $|a - 3| = 2 \Leftrightarrow a = 1$, или $a = 5$.

При $a = 3$ исходное уравнение принимает вид: $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа −2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = 1$ и при $a = 5$ уравнение принимает вид: $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней. При $a = 1$ и при $a = 5$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 1; 5

С 6 . Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 8 - 10 = 16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.